1-EN_VIII_Matematica_2024_var_simulare_LRO_-www.matematicaromania.ro-2

Tuesday, February 6, 2024 11:56 AM

1-EN_VIII_ Matemati...

[redacted]

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

5p	**1.** Rezultatul calculului $52-2\cdot(25-5)$ este: **a)** 12 **b)** 92 **c)** 100 **d)** 1000 $52-2\cdot 20=52-40=12$
5p	**2.** Dacă $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{3}$, atunci rezultatul calculului $3x-5y$ este: **a)** 0 **b)** 2 **c)** 5 **d)** 6 $3\cdot(x-2)=5y$ $\Leftrightarrow 3x-6=5y$ $\Leftrightarrow 3x-5y=6$
5p	**3.** Se consideră mulțimile $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ și $B=\{0,2,4,6,8\}$. Intersecția mulțimilor A și B este mulțimea: **a)** $\{0,2,4,6,8\}$ **b)** $\{0,1,2,3,4,5,6,8\}$ **c)** $\{2,4,6\}$ **d)** $\{0,2,4,6\}$ $A\cap B=\{2,4,6\}$
5p	**4.** Mulțimea soluțiilor reale ale inecuației $2x+2\geq 4$ este: **a)** $(-\infty,-1]$ **b)** $(-\infty,1]$ **c)** $[-1,+\infty)$ **d)** $[1,+\infty)$ $2x+2\geq 4 \,/-2$ $2x\geq 2\,/:2$ $x\geq 1$

5p	5. Patru elevi, Ana, Ioan, Dana și Vlad determină numărul $a=\left\|2-4\sqrt{3}\right\|+2\left(\sqrt{12}+1\right)$. Rezultatele obținute de cei patru elevi sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Ana	Ioan	Dana	Vlad
0	4	$4\sqrt{3}$	$8\sqrt{3}$

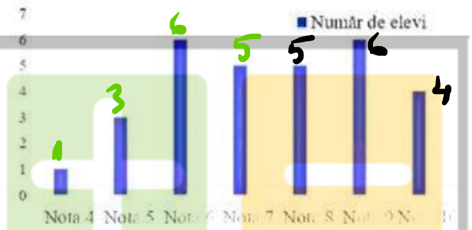
Conform informațiilor din tabel, elevul care a determinat corect numărul a este:

$2<4\sqrt{3}$

a) Ana
b) Ioan
c) Dana
d) Vlad

$a=4\sqrt{3}-2+2(2\sqrt{3}+1)$
$=4\sqrt{3}\cancel{-2}+4\sqrt{3}\cancel{+2}=8\sqrt{3}$

5p 6. În diagrama de mai jos sunt prezentate rezultatele obținute de elevii unei clase, la un test de matematică.



Total:
$1+3+6+5+5+6+4=30$
Minim 8:
$5+6+4=15$

Afirmația: „Conform informațiilor din diagramă, jumătate din numărul elevilor acestei clase a obținut la testul de matematică cel puțin nota 8." este:

a) adevărată
b) falsă

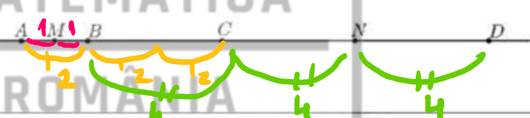
SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p 1. În figura alăturată punctele A, B, C și D sunt coliniare, în această ordine, astfel încât $BC=2AB$, $CD=2BC$ și $AB=2\text{cm}$. Punctul M este mijlocul segmentului AB și punctul N este mijlocul segmentului CD. Lungimea segmentului MN este egală cu:

$MB+BC+CN=1+4+4=9$

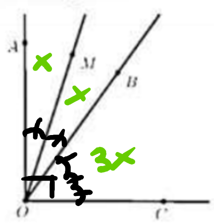
a) 4cm
b) 5cm
c) 7cm
d) 9cm



5p 2. În figura alăturată sunt reprezentate unghiurile adiacente complementare AOB și BOC. Semidreapta OM este bisectoarea unghiului AOB și $\sphericalangle BOC=3\cdot\sphericalangle AOM$. Măsura unghiului AOB este egală cu:

a) 18°
b) 36°
c) 40°
d) 54°

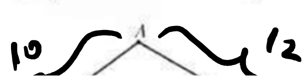
$\sphericalangle AOC=x+x+3x=5x$
$90°=5x$
$x=\frac{90}{5}=18°$
$\sphericalangle AOB=x+x=36°$



Rez. II 3: BI bis $\sphericalangle B \Rightarrow \sphericalangle DBI \equiv \sphericalangle IBC$, dar $\sphericalangle IBC \equiv BID$ (alt. int)
$\Rightarrow \sphericalangle DBI \equiv \sphericalangle DIB \Rightarrow \Delta BDI$ isoscel $\Rightarrow BD=DI$
Analog $EI=EC$.
$DE=DI+EI=BD+EC=10-AD+12-AE=22-AD-AE$
$BD=AB-AD=10-AD$; $EC=AC-AE=12-AE$
$P_{\Delta ADE}=AD+AE+DE=\cancel{AD}+\cancel{AE}+22\cancel{-AD}\cancel{-AE}=22$

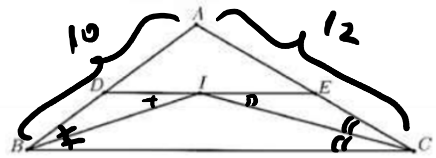
5p 3. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu $AB=10\text{cm}$ și $AC=12\text{cm}$. Semidreapta BI este bisectoarea unghiului ABC și semidreapta CI este bisectoarea unghiului ACB. Paralela prin punctul I la dreapta BC intersectează dreptele AB și AC în punctele D, respectiv E. Perimetrul triunghiului ADE este egal cu:

a) 11cm



dreapta BC intersectează dreptele AB şi AC în punctele D, respectiv E. Perimetrul triunghiului ADE este egal cu:

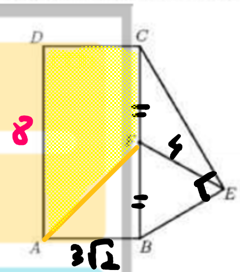
a) 11cm
b) 20cm
c) 22cm
d) 24cm



5p **4.** În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$, cu $AB = 3\sqrt{2}$ cm şi triunghiul BEC dreptunghic în E. Punctul F este mijlocul segmentului BC şi $EF = 4$ cm.
Aria trapezului $AFCD$ este egală cu:

a) $6\sqrt{2}$ cm^2
b) $12\sqrt{2}$ cm^2
c) $18\sqrt{2}$ cm^2
d) $24\sqrt{2}$ cm^2

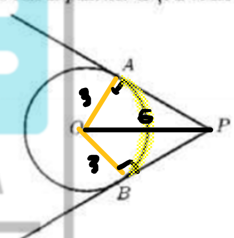
EF mdn $= \frac{BC}{2}$
$\Rightarrow BC = 4\cdot 2 = 8$cm.
$\mathcal{A}_{AFCD} = \frac{(AD+CF)DC}{2}$
$= \frac{(8+4)\cdot 3\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}$



5p **5.** În figura alăturată este reprezentat cercul cu centrul în punctul O şi raza egală cu 3 cm. Punctul P este situat la o distanţă de 6 cm de centrul cercului. Dreptele PA şi PB sunt tangente la cerc în punctele A şi B. Măsura arcului mic AB este egală cu:

a) 60°
b) 90°
c) 120°
d) 150°

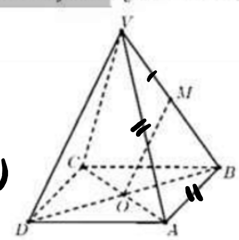
$PA \perp OA$, $OA = \frac{PO}{2} \Rightarrow$ (RT∢30)
$\sphericalangle APO = 30° \Rightarrow \sphericalangle AOP = 60°$
$\Rightarrow \sphericalangle AOB = 120°$
$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 120°$



5p **6.** În figura alăturată este reprezentată piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu baza $ABCD$, $VA = AB$ şi O este punctul de intersecţie a dreptelor AC şi DB. Dacă punctul M este mijlocul segmentului VB, atunci măsura unghiului dreptelor OM şi CD este egală cu:

a) 0°
b) 30°
c) 45°
d) 60°

$O =$ mij BD
$M =$ mij VB $\Big\} \Rightarrow$ OM l.m. $\triangle VBD$
$\Rightarrow OM \parallel VD \Rightarrow \sphericalangle(OM;CD)$
$= \sphericalangle(VD;CD) = \sphericalangle VDC = 60°$
($\triangle VCD$ echilateral m = l)



SUBIECTUL al III-lea

Scrie rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Maria aranjează cărţile din bibliotecă şi observă că dacă le grupează câte 8, câte 12 sau câte 18 îi rămân de fiecare dată 5 cărţi.
(2p) a) Verifică dacă Maria poate avea în bibliotecă 53 de cărţi. Justifică răspunsul dat.

n = numărul de cărti
Dacă n = 53: 53 : 8 = 6, rest 5
53 : 12 = 4, rest 5
53 : 18 = 2, rest 17 ≠ 5
Maria nu poate avea 53 cărti.

5p **(3p) b)** Determină numărul cărţilor din biblioteca Mariei, ştiind că acesta este cel mai mic număr natural de trei cifre cu proprietăţile din enunţ.

$n : 8 = x$, rest 5 $\Rightarrow n = 8x + 5 \,/ -5 \Rightarrow n - 5 = 8x$
$n : 12 = y$, rest 5 $\Rightarrow n = 12y + 5 \,/ -5 \Rightarrow n - 5 = 12y$
$n : 18 = z$, rest 5 $\Rightarrow n = 18z + 5 \,/ -5 \Rightarrow n - 5 = 18z$
$x, y, z \in \mathbb{N}$

$n : 18 = z$ rest $5 \Rightarrow n = 18z + 5 \;/-5 \Rightarrow n-5 = 18z$

$x, y, z \in \mathbb{N}$

$n_{min} \Rightarrow n-5 = [8, 12, 18] = 2^3 \cdot 3^2 = 72$

$8 = 2^3 \quad 12 = 2^2 \cdot 3 \,; \; 18 = 2 \cdot 3^2 \qquad 72 \cdot 2 = 144$

$\Rightarrow n-5 = 144 \Rightarrow n = 149$

5p 2. Se consideră expresia $E(x) = (2x+3)^2 + (x-2)(x+2) - 3(1-x) + 2$, unde x este număr real.

(2p) a) Arată că $E(0) = 4$.

$E(x) = 4x^2 + 12x + 9 + x^2 - 4 - 3 + 3x + 2$

$= 5x^2 + 15x + 4$

$E(0) = 5 \cdot 0^2 + 15 \cdot 0 + 4 = 4$

(3p) b) Arată că numărul $N = E(n) + 6$ este divizibil cu 10, pentru orice număr natural n.

$N = 5n^2 + 15n + 4 + 6 = 5n^2 + 15n + 10$

$= 5(n^2 + 3n + 2)$

$n = 2k \Rightarrow N = 5[(2k)^2 + 3 \cdot (2k) + 2] =$

$\Rightarrow N = 5(4k^2 + 6k + 2) = 5 \cdot 2(2k^2 + 3k + 1)$

$= 10(2k^2 + 3k + 1) \,\vdots\, 10$

$n = 2k+1 \Rightarrow N = 5[(2k+1)^2 + 3(2k+1) + 2]$

$\Rightarrow N = 5(4k^2 + 4k + 1 + 6k + 3 + 2)$

$N = 5(4k^2 + 10k + 6) = 5 \cdot 2(2k^2 + 5k + 3)$

$= 10(2k^2 + 5k + 3) \,\vdots\, 10 \Rightarrow N \,\vdots\, 10, \; \forall n \in \mathbb{N}$

5p 3. Se consideră numărul natural $\overline{abc}$ cu a, b, c cifre nenule, unde $a = 5 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) - \frac{2}{3} : \frac{1}{3}$ și $b = (3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4) : 9^4 - 25^4 : 5^7$.

(2p) a) Arată că $a = 3$.

$a = 5 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) - \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 5 \cdot \frac{3+2+1}{6} - \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{1}$

$= 5 \cdot \frac{6}{6} - 2 = 5 \cdot 1 - 2 = 3$

(3p) b) Determină numărul $\overline{abc}$, știind că numerele $\overline{ac}$ și $\overline{cb}$ sunt direct proporționale cu numerele 4 și 3.

$b = (3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4) : 9^4 - 25^4 : 5^7 = 3^{1+2+3+4} : (3^2)^4$

$- (5^2)^4 : 5^7 = 3^{10} : 3^8 - 5^8 : 5^7 = 3^2 - 5^1 = 9 - 5$

$= 4$

$\overline{abc} = \overline{34c}; \quad \overline{ac} = \overline{3c} = 30 + c;$

$\overline{cb} = \overline{c4} = 10c + 4$

$\frac{\overline{ac}}{4} = \frac{\overline{cb}}{3} \quad \Leftrightarrow \frac{30+c}{4} = \frac{10c+4}{3}$

$\Leftrightarrow (30+c) \cdot 3 = 4(10c+4) \Leftrightarrow 90 + 3c$

$= 40c + 16 \Leftrightarrow 3c - 40c = 16 - 90$

$(\Leftrightarrow)\ (30+c)\cdot 3 = 4(10c+4) \Leftrightarrow 90+3c$

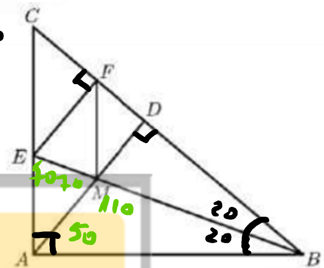
$= 40c+16 \Leftrightarrow 3c-40c = 16-90$

$\Leftrightarrow -37c = -74 \Leftrightarrow c = 2$

$\overline{abc} = 342$

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$ și $\sphericalangle B = 40°$. Semidreapta BE este bisectoarea unghiului ABC, punctul E aparține segmentului AC. Perpendiculara din punctul A pe BC intersectează dreapta BC în punctul D, iar perpendiculara din punctul E pe BC intersectează dreapta BC în punctul F. Dreptele BE și AD se intersectează în punctul M.

(2p) a) Arată că măsura unghiului EMA este egală cu $70°$.



ΔADB dr. în D

$\Rightarrow \sphericalangle DAB = 90° - \sphericalangle DBA = 90° - 40°$

$\Rightarrow \sphericalangle DAB = 50°$

BE bis $\sphericalangle B \Rightarrow \sphericalangle ABE \equiv EBC = \frac{40}{2} = 20°$;

ΔAMB: $\sphericalangle AMB = 180° - \sphericalangle MAB - \sphericalangle ABM$

$= 180° - 50° - 20° = 110°$

E, M, B col $\Rightarrow \sphericalangle EMB = 180°$; $\sphericalangle EMA = 180° - \sphericalangle AMB$

$= 180° - 110° = 70°$

(3p) b) Arată că patrulaterul $AMFE$ este romb.

$\left.\begin{array}{l} AD \perp BC \\ EF \perp BC \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} AD \parallel EF \\ M \in AD \end{array}\right| \Rightarrow AM \parallel EF\ (1)$

ΔEAB: $\sphericalangle AEB = 180° - \sphericalangle EAB - ABE = 180° - 90° - 20° = 70°$

ΔAEM: $\sphericalangle AEM \equiv \sphericalangle EMA = 70° \Rightarrow \Delta AEM$ isoscel

$\Rightarrow AE = AM\ (2)$

$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle FBE \equiv \sphericalangle ABE = 20° \\ \sphericalangle BFE \equiv \sphericalangle BAE = 90° \\ BE = BE \text{ (lat. comună)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta FBE \equiv \Delta ABE \Rightarrow AE = EF\ (3)$

Din (2) și (3) $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} AM = EF \\ (1) \Rightarrow AM \parallel EF \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow AMFE \text{ paralelogram} \\ (3) \Rightarrow AE = EF \end{array}\right\} \Rightarrow AMFE$ romb

5p 5. În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$ cu $AB = 15\text{ cm}$. Punctul P aparține laturii AB, astfel încât $PB = 2AP$ și O este punctul de intersecție a dreptelor AC și BD.

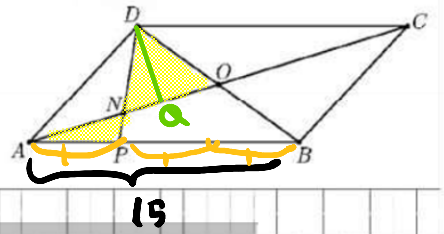
(2p) a) Arată că lungimea segmentului AP este egală cu 5 cm.

$AB = AP + PB$

$15 = AP + 2AP$

$15 = 3AP \;/ :3$

$AP = 5\text{ cm.}$



(3p) b) Determină raportul dintre aria triunghiului ANP și aria triunghiului DNO, unde N este punctul de intersecție a dreptelor AC și DP.

$AP \parallel DC \Rightarrow (TFA)\ \Delta ANP \sim \Delta CND \Rightarrow \frac{AP}{CD} = \frac{AN}{CN} = \frac{PN}{DN}$

$\Rightarrow \frac{5^{(5}}{15} = \frac{AN}{CN} = \frac{PN}{DN} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{AN}{CN} = \frac{PN}{DN} = k$

$\Rightarrow CN = 3AN$ și $DN = 3PN$

$CN + AN = CA \Rightarrow 4AN = CA \Rightarrow AN = \frac{CA}{4} = \frac{2OA}{4} = \frac{OA}{2} = NO$

Fie $DQ \perp NC \Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta CND} = \frac{DQ \cdot CN}{2}$

$AN = NO$ și $CN = 3AN \Rightarrow CN = 3NO$

$\Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta CND} = \frac{DQ \cdot 3NO}{2}$

$\Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta CND} = 3 \cdot \frac{DQ \cdot NO}{2} = 3 \cdot \mathcal{A}_{\Delta DON}$

$\Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta DON} = \frac{\mathcal{A}_{CND}}{3}$

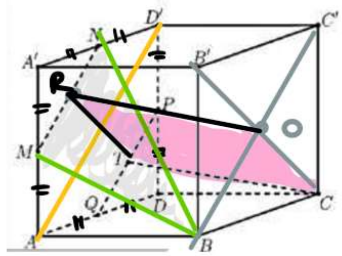
$\Delta ANP \sim \Delta CND$ cu $k = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\mathcal{A}_{\Delta ANP}}{\mathcal{A}_{\Delta CND}} = k^2 = \frac{1}{9}$

$\Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta ANP} = \frac{\mathcal{A}_{CND}}{9}$

$\Rightarrow \frac{\mathcal{A}_{ANP}}{\mathcal{A}_{DNO}} = \frac{\frac{\mathcal{A}_{CND}}{9}}{\frac{\mathcal{A}_{CND}}{3}} = \frac{\cancel{\mathcal{A}_{\Delta CND}}}{9} \cdot \frac{3}{\cancel{\mathcal{A}_{\Delta CND}}} = \frac{3^{(3}}{9} = \frac{1}{3}$

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$. Punctele M, N, P și Q sunt mijloacele segmentelor AA', $A'D'$, DD', respectiv AD.

(2p) a) Arată că $MN = PQ$.



M mijlocul AA' $\Big|$ $\Rightarrow$
N mijlocul $A'D'$ $\Big|$

$\Rightarrow MN$ linie mijlocie $\Delta A'AD$

$\Rightarrow MN = \frac{AD'}{2}$

P mijlocul DD' $\Big|$ $\Rightarrow PQ$ l.mij. $\Delta DAD' \Rightarrow PQ = \frac{AD'}{2} \Rightarrow MN = PQ$
Q mijlocul AD $\Big|$

(3p) b) Știind că punctul T este mijlocul segmentului PQ, demonstrează că dreapta CT este paralelă cu planul (MNB).

Fie $BC' \cap CB' = \{O\}$

Notăm x = muchia cubului

$B'C = x\sqrt{2} \Rightarrow CO = \frac{x\sqrt{2}}{2}$

Fie R mijlocul lui $MN \Rightarrow RM = \frac{MN}{2}$ $\Big|$ $\Rightarrow RM = TQ$
T mijlocul lui $PQ \Rightarrow TQ = \frac{PQ}{2}$ $\Big|$

$MN \parallel PQ \Rightarrow RM \parallel TQ$

$\Rightarrow RTQM$ paralelogram $\Rightarrow RT = MQ$, $RT \parallel MQ$

$M =$ mij. AA' $\Big|$ $\Rightarrow MQ =$ l.mij $\Delta A'AD \Rightarrow MQ \parallel A'D$ și
$Q =$ mij. AD $\Big|$

$MQ = \frac{A'D}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2} = RT$

$\Rightarrow RT = CO = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ (1)

$A'B' \underline{\parallel} CD \Rightarrow A'B'CD$ paralelogram $\Rightarrow A'D \parallel B'C$

și $RT \parallel MQ \parallel A'D \Rightarrow RT \parallel B'C \Rightarrow RT \parallel CO$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow RTCO$ paralelogram

$\Rightarrow CT \parallel RO$

$MN \parallel BO \Rightarrow M, N, B, O$ coplanare $\Rightarrow O \in (MNB)$

$R \in MN \Rightarrow R \in (MNB)$

$\Rightarrow OR \subset (MNB)$ și $CT \parallel RO \Rightarrow CT \parallel (MNB)$