

WWW.MATEMATICAROMANIA.RO

Simulare, Bacalaureat, ianuarie 2024

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z + 2\bar{z} = 9 + 4i$, \bar{z} este conjugatul lui z . Arătați că modulul numărului z este egal cu 5.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 5$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = mx + 1$. Determinați numărul real m pentru care $(g \circ f)(2) = 4$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+2} + 2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^x = 99$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra sutelor egală cu cifra unităților.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,3)$ și $B(5,1)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului AB .
- 5p** 6. Arătați că $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(x) = I_2 + xA$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(M(1)) = -2$.
- 5p** b) Demonstrați că $M(x) \cdot M(y) = M(x + y - 3xy)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Arătați că **nu** există numere întregi impare x și y , astfel încât $M(x) \cdot M(y) = M(2024)$.
2. Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = x^{\ln \sqrt[3]{y}}$.
- 5p** a) Arătați că $2 \circ 1 = 1$.
- 5p** b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”.
- 5p** c) Determinați $x \in M$ pentru care $x \circ x = e^3$

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $f(e) < \frac{7}{2}$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}}$.
- 5p** a) Demonstrați că funcția $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$ este o primitivă a funcției f .

5p b) Calculați $\int \frac{1}{f(x)} dx$, $x \in (0, +\infty)$.

5p c) Determinați primitiva $H : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției $h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f^2(x)$, știind că $H(1) = 1$.