

WWW.MATEMATICAROMANIA.RO

Simulare, Bacalaureat, ianuarie 2024

Proba E. c)

Matematică $M_{mate-info}$

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră numărul complex $z = 1 + i$. Arătați că $2z = z^2 + 2$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x - m$, unde m este număr real. Determinați valorile reale ale lui m pentru care $f(x) > 1$, pentru orice număr real x .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(3x^2 - 12) = 2\log_2(x + 2)$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 4 sau cu 5.
- 5p 5. Se consideră punctul D în planul triunghiului ABC astfel încât $2\overline{DB} = \overline{AB} + \overline{DC}$. Arătați că patrulaterul $ADBC$ este paralelogram.
- 5p 6. Determinați $x \in (0, 2\pi)$ pentru care $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x - \cos x$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1-m & 2m & 0 \\ -m & 1+2m & 0 \\ 0 & 0 & 1+m \end{pmatrix}$, unde m este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = 4$.
- 5p b) Demonstrați că $A(m) \cdot A(n) = A(m+n+mn)$, pentru orice numere reale m și n .
- 5p c) Demonstrați că, dacă m , n și p sunt numere reale pentru care $A(m) \cdot A(n) \cdot A(p) = A(0)$, atunci $(1+m)(1+n)(1+p) = 1$.
2. Pe $M = [1, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \log_3(3^{x+y} - 3^{x+1} - 3^{y+1} + 12)$.
- 5p a) Arătați că $x * y = \log_3((3^x - 3)(3^y - 3) + 3)$, pentru orice $x, y \in M$.
- 5p b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p c) Determinați $x \in M$ pentru care $x * x * x = x$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{3(1-x)}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^{2x}$.

5p c) Demonstrați că $2\sqrt{e^{2x} + 3} - e^x - 3 \geq 0$, pentru orice număr real x .

2. Se consideră funcția $f : (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x^2 + 1}$.

5p a) Calculați $\int \frac{f(x)}{\ln(x+2)} dx$, $x \in (-2, +\infty)$.

5p b) Calculați $\int f(x)(x^2 + 1) dx$, $x \in (-2, +\infty)$.

5p c) Arătați că $F\left(-\frac{1}{2023}\right) < F\left(-\frac{1}{2024}\right)$, unde $F : (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f .