

WWW.MATEMATICAROMANIA.RO

**Simulare, Bacalaureat, ianuarie 2024
Proba E. c)**

**Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z^2 + 2 = (1+i)^2 + 2 =$	2p
	$= 1 + 2i + i^2 + 2 = 2 + 2i = 2(1+i) = 2z$	3p
2.	$\Delta = 4m + 20$	2p
	$f(x) > 0$ pentru orice număr real x , deci $\Delta < 0$, de unde obținem $m \in (-\infty, -5)$	3p
3.	$3x^2 - 12 = (x+2)^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$	3p
	$x = -2$, care nu convine $x = 4$, care convine	2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de doua cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	2p
	În aceasta mulțime există 22 de numere divizibile cu 4, 18 de numere divizibile cu 5 și 4 numere divizibile atât cu 4 cât și cu 5, deci sunt $22+18-4=36$ de cazuri favorabile	2p
	$P = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{36}{90} = \frac{2}{5}$	1p
5.	$2\overline{DB} - \overline{DC} = \overline{DB} + \overline{DB} - \overline{DC} \Leftrightarrow \overline{DB} + \overline{DB} + \overline{CD} = \overline{DB} + \overline{CB} = \overline{AB}$	3p
	$\overline{DB} = \overline{AB} - \overline{CB} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, deci $ADBC$ este paralelogram.	2p
6.	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \Leftrightarrow \cos x - \sin x = \sin x - \cos x$	3p
	$\Leftrightarrow \cos x = \sin x$ și, cum $x \in (0, 2\pi)$, obținem $x = \frac{\pi}{4}$ sau $x = \frac{5\pi}{4}$	2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$	2p
	$= 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - (-4) = 4$	3p

b)	$A(m) \cdot A(n) = \begin{pmatrix} 1-m-n-mn & 2n+2mn+2m & 0 \\ -m-n-mn & 1+2m+2n+2mn & 0 \\ 0 & 0 & 1+m+n+mn \end{pmatrix} =$	3p
	$= \begin{pmatrix} 1-(m+n+mn) & 2(m+n+mn) & 0 \\ -(m+n+mn) & 1+2(m+n+mn) & 0 \\ 0 & 0 & 1+(m+n+mn) \end{pmatrix} = A(m+n+mn),$ <p>pentru orice numere reale m și n.</p>	2p
c)	$A(m) \cdot A(n) \cdot A(p) = A(m+n+mn) \cdot A(p) = A(m+n+p+mn+mp+np+mnp),$ obținem $m+n+p+mn+mp+np+mnp=0$	3p
	$1+m+n+p+mn+mp+np+mnp=1 \Rightarrow (1+m)+n(1+m)+p(1+m)+np(1+m)=1,$ de unde obținem $(1+m)(1+n+p+np)=1,$ deci $(1+m)(1+n)(1+p)=1$	2p
2. a)	$x * y = \log_3(3^x(3^y-3)-3^{y+1}+9+3) =$ $= \log_3(3^x(3^y-3)-3(3^y-3)+3) = \log_3((3^x-3)(3^y-3)+3),$ pentru orice $x, y \in M$	3p
		2p
b)	$x * e = x$ pentru orice $x \in M,$ unde e este elementul neutru al legii de compoziție, deci $(3^x-3)(3^e-4)=0,$ pentru orice $x \in M,$ de unde obținem $e = \log_3 4 \in M$	3p
	Cum $(\log_3 4) * x = x$ pentru orice $x \in M,$ obținem că $e = \log_3 4$ este elementul neutru al legii de compoziție „*„.	2p
c)	$x * x * x = \log_3((3^x-3)^3+3) = x \Leftrightarrow (3^x-3)^3+3=3^x \Leftrightarrow (3^x-3)^3=3^x-3$	3p
	Deci $3^x-3=0$ sau $(3^x-3)^2=1,$ de unde $x=1$ sau $x=\log_3 4,$ care convin.	2p

SUBIECTUL al III-lea
(30 de puncte)

1. a)	$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+3} - (x+3) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3} =$	3p
	$= \frac{x^2+3-x^2-3x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}} = \frac{3(1-x)}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}, x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(x+3)^2}{x^2+3} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+6x+9}{x^2+3} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{6x+6}{x^2+3} \right)^x =$	3p
	$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{6x+6}{x^2+3} \right)^{\frac{x^2+3}{6x+6}} \right)^{\frac{6x^2+6x}{x^2+3}} = e^6$	2p
c)	$f'(x) \geq 0,$ pentru orice $x \in (-\infty, 1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty, 1]$ și $f'(x) \leq 0,$ pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1, +\infty)$ și, cum $f(1) = 2,$ obținem că $f(x) \leq 2$ pentru orice număr real x	3p
	$f(e^x) \leq 2 \Rightarrow \frac{e^x+3}{\sqrt{e^{2x}+3}} \leq 2 \Rightarrow 2\sqrt{e^{2x}+3} \geq e^x+3 \Rightarrow 2\sqrt{e^{2x}+3} - e^x - 3 \geq 0, x \in \mathbb{R}$	2p

2. a)	$\int \frac{f(x)}{\ln(x+2)} dx = \int \frac{\frac{\ln(x+2)}{x^2+1}}{\ln(x+2)} dx =$ $= \int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctg x + C, C \in \mathbb{R}, x \in (-2, +\infty)$	3p 2p
b)	$\int f(x)(x^2+1) dx = \int \frac{\ln(x+2)}{x^2+1} (x^2+1) dx = \int \ln(x+2) dx =$ $= x \ln(x+2) - \int \frac{x}{x+2} dx = x \ln(x+2) - x + 2 \ln(x+2) = (x+2) \ln(x+2) - x + C$	2p 3p
c)	<p>F este o primitivă a lui f, deci $F'(x) = f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x^2+1}$, de unde obținem că $F'(x) > 0$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$, deci F este strict crescătoare pe $(-1, +\infty)$</p> <p>Cum $-1 < -\frac{1}{2023} < -\frac{1}{2024}$, obținem că $F\left(-\frac{1}{2023}\right) < F\left(-\frac{1}{2024}\right)$.</p>	3p 2p