

## Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)  
Matematică  $M_{\text{șt\_nat}}$ 

Model decembrie 2023

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore

## SUBIECTUL I

(30 puncte)

- 5p 1) Arătați că  $\sqrt[3]{16} - \frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{2}$ .
- 2) Ecuația  $x^2 - x + a + 1 = 0, a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  are soluțiile  $x_1, x_2$ . Determinați  $a$  știind că
- 5p  $\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) = 1$ .
- 5p 3) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $10^x - 5 \cdot 2^x - 5^x + 5 = 0$ .
- 5p 4) Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi știind că admite 16 submulțimi cu număr impar de elemente.
- 5p 5) În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(0, 2), B(2, 0)$ . Determinați raza cercului înscris în triunghiul  $AOB$ .
- 5p 6) Determinați  $x \in (0, \pi)$  dacă  $\sin 2x = 2 - 2 \cos^2 x$ .

## SUBIECTUL al II-lea

(30 puncte)

- 1) Se consideră matricele  $A(x) = \begin{pmatrix} 1+3x & -2x \\ 3x & 1-2x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}, X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p a) Arătați că  $A(x) = I_2 + x \cdot X$  pentru orice număr real  $x$ .
- 5p b) Calculați  $A(-1)A(2024)$ .
- 5p c) Determinați numărul real  $x$  știind că  $A(x)A(x)A(x) = A(7)$ .
- 2) Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 y^2}$ .
- 5p a) Arătați că  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \circ \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = 1$ .
- 5p b) Pentru  $M = (0, 1]$ , arătați că pentru orice  $x, y \in M, x \circ y \in M$ .
- 5p c) Calculați  $1 \circ \frac{1}{\sqrt{2}} \circ \frac{1}{\sqrt{3}} \circ \dots \circ \frac{1}{\sqrt{100}}$ .

## SUBIECTUL al III-lea

(30 puncte)

- 1) Se consideră funcția  $f: (4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x-2})^2}$ , pentru orice  $x \in (4, +\infty)$ .

- 5p** b) Determinați coordonatele punctului de intersecție al asimptotei verticale al graficului funcției  $f$  cu asimptota spre  $+\infty$ .
- 5p** c) Arătați că ecuația  $f(x) = a$  are o singură soluție reală, pentru orice  $a \in (1, \infty)$ .
- 2) Se consideră funcția  $f: \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{1 + \sin 2x}$ .
- 5p** a) Arătați că orice primitivă a funcției  $f$  este convexă pe  $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ .
- 5p** b) Calculați  $\int (1 - f^2(x)) dx$ ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$
- 5p** c) Determinați funcția  $F: \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ , primitiva funcției  $f$  care are proprietatea că  $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$