

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE
WWW.MATEMATICAROMANIA.RO
Simulare
Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I
(30 de puncte)

1.	$a_1 = -1, a_3 = 7 \Rightarrow r = 4$ $a_5 = 15$	3p 2p
2.	$A(-1, a) \in G_f \Leftrightarrow f(-1) = a$ $a = -2$	3p 2p
3.	$5^{x^2-5x} = 5^{-4} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$ $x_1 = 1, x_2 = 4$	3p 2p
4.	Numerele au forma \overline{abc} unde $a, b, c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ cu $a \neq 0, a \neq b, b \neq c, a \neq c$ Pentru a avem 4 posibilități, pentru b avem 4 posibilități, iar pentru c avem 3 posibilități Sunt $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ de astfel de numere	3p 2p
5.	Mijlocul M al segmentului AB are coordonatele $x_M = \frac{1+3}{2} = 2, y_M = \frac{3+5}{2} = 4$ Panta dreptei AB este $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 1$ Din condiția de perpendicularitate $m_d m_{AB} = -1 \Rightarrow m_d = -1$ Ecuația mediatoarei: $y - y_M = m_d(x - x_M) \Leftrightarrow y - 4 = -1(x - 2) \Leftrightarrow y = -x + 6$	2p 3p
6.	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$ Din $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \cos x < 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ Atunci $\sin(2x) = 2 \sin x \cdot \cos x = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$	2p 3p

SUBIECTUL II
(30 de puncte)

1. a)	Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Relația $X \cdot A = A \cdot X \Leftrightarrow a + 4b = a, b = b, c + 4d = 4a + c, d = 4b + d$ Deducem $b = 0$ și $d = a$ Se ia $u = a \in \mathbb{R}$ și $v = c \in \mathbb{R}$ și obținem concluzia	3p 2p
b)	$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$ Prin inducție matematică se demonstrează că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4n & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*$	2p 3p
c)	Din ecuația $X^4 = A \Rightarrow X \cdot A = A \cdot X$ Conform subpunctului a) deducem că există $u, v \in \mathbb{R}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} u & 0 \\ v & u \end{pmatrix}$.	

	<p>Atunci $X^2 = \begin{pmatrix} u^2 & 0 \\ 2uv & u^2 \end{pmatrix}, X^4 = \begin{pmatrix} u^4 & 0 \\ 4u^3v & u^4 \end{pmatrix}$</p> <p>Ecuția devine $\begin{pmatrix} u^4 & 0 \\ 4u^3v & u^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, de unde $u^4 = 1, 4u^3v = 4 \Rightarrow$ $(u, v) \in \{(-1, -1), (1, 1)\}$. Soluțiile ecuației sunt $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
2. a)	<p>$\forall x, y \in \mathbb{R}$, avem $x \circ y = 2xy + 2x + 2y + 1 = 2xy + 2x + 2y + 2 - 1 =$ $= 2x(y + 1) + 2(y + 1) - 1 =$ $= 2(y + 1)(x + 1) - 1 = 2(x + 1)(y + 1) - 1$</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
b)	<p>Din a) avem $a \circ b = 2(a + 1)(b + 1) - 1, a, b \in \mathbb{R}$</p> <p>Alegem $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $a + 1 = \sqrt{2}$ și $b + 1 = 2\sqrt{2}$, adică $a = \sqrt{2} - 1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, b = 2\sqrt{2} - 1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$</p> <p>Atunci $(\sqrt{2} - 1) \circ (2\sqrt{2} - 1) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} - 1 = 8 - 1 = 7 \in \mathbb{N}$</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
c)	<p>Conform a) avem $x \circ x = 2(x + 1)^2 - 1, x \circ x \circ x = 4(x + 1)^3 - 1$</p> <p>Ecuția devine $(x + 1)(2x + 1)(2x + 3) = 0$</p> <p>Se obțin soluțiile reale $x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = -\frac{3}{2}$</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>

SUBIECTUL III

(30 de puncte)

1. a)	<p>Funcția f este continuă pe $(0, \infty)$ deci în aceste puncte nu avem asimptote verticale</p> <p>$\lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$, deci dreapta de ecuație $x = 0$ este asimptotă verticală</p> <p>$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, deci dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
b)	<p>Funcția f este continuă și derivabilă pe $(0, \infty)$ și $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, x \in (0, \infty)$.</p> <p>Ecuția $f'(x) = 0$ are soluția $x = e \in (0, \infty)$.</p> <p>Cum $f'(x) > 0, \forall x \in (0, e)$ și $f'(x) < 0, \forall x \in (e, \infty)$, deduce că funcția f este strict crescătoare pe $(0, e]$ și strict descrescătoare pe $[e, \infty)$.</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
c)	<p>Conform b), $x = e$ este punct de maxim global, deci $f(e) = \frac{1}{e}$ este maximul global al funcției, deci $f(x) \leq f(e) \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{1}{e}, \forall x \in (0, \infty)$.</p> <p>Se obține egalitate pentru $x = e$.</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
2. a)	<p>F derivabilă pe $\mathbb{R}, F'(x) = (x - a)'e^x + (x - a)(e^x)' + (b)' = (x - a + 1)e^x, \forall x \in \mathbb{R}$</p> <p>$F$ este primitivă pentru f deci $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.</p> <p>Deducem că $a = 2$, iar b poate fi orice număr real.</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
b)	<p>Pentru $a = 2$ și $b = e$ obținem $F(x) = (x - 2)e^x + e \Rightarrow$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{2} = \frac{e}{2}$</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
c)	<p>Fie $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a funcției F. Atunci G este derivabilă pe \mathbb{R} și $G'(x) = F(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow G''(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.</p> <p>Cum $G''(x) \geq 0, \forall x \in [1, \infty)$, deducem că funcția G este convexă pe $[1, \infty)$.</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>