

**Examenul național de bacalaureat 2024**

Proba E. c)

 Matematică *M\_șt-nat*
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**
**WWW.MATEMATICAROMANIA.RO**

Model decembrie 2023

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**
**(30 puncte)**

1.	$\sqrt[3]{16} - \frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{64} - 2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{4}} =$ $= \frac{2\sqrt[3]{2}}{2} = \sqrt[3]{2}$	3p 2p
2.	$x_1 + x_2 = 1, x_1 x_2 = a + 1, \left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) = x_1 x_2 + \frac{1}{x_1 x_2} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = 1$ $(a+1)^2 + a + 1 = 0 \Rightarrow a = -2 \text{ care convine, } a = -1 \text{ care nu convine.}$	3p 2p
3.	Ecuația se scrie $(2^x - 1)(5^x - 5) = 0$ $x = 0, x = 1$ care convin	3p 2p
4.	Numărul de submulțimi cu număr impar de elemente ale unei mulțimi cu $n$ elemente este $2^{n-1}$ , unde $n \in \mathbb{N}^*$ . Cum $2^{n-1} = 16$ , rezultă $n = 5$ care convine.	2p 3p
5.	Cum $OA = OB$ , triunghiul $AOB$ este dreptunghic isoscel. $A = 2$ este aria triunghiului $AOB$ și perimetrul este $P = 4 + 2\sqrt{2}$ Raza cercului înscris este $r = 2 - \sqrt{2}$ .	2p 2p 1p
6.	$1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ și ecuația devine $2\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 0$ $\sin x (\sin x - \cos x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pi$ care nu convin, $\sin x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ care convine.	2p 3p

**SUBIECTUL al II-lea**
**(30 puncte)**

1.a)	$\begin{pmatrix} 1+3x & -2x \\ 3x & 1-2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x & -2x \\ 3x & -2x \end{pmatrix} =$ $= I_2 + x \cdot X, \text{ pentru orice număr real } x.$	2p 3p
b)	$A(-1)A(2024) = (I_2 - X)(I_2 + 2024X) = I_2 + 2023X - 2024X^2$ Cum $X \cdot X = X$ , $A(-1)A(2024) = A(-1)$	3p 2p
c)	$A(x)A(x)A(x) = A((x+1)^3 - 1), \text{ pentru orice număr real } x.$ $(x+1)^3 = 8 \Rightarrow x = 1$	3p 2p

WWW.MATEMATICAROMANIA.RO

<b>2.a)</b>	$tg \frac{\pi}{4} = 1, tg \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	<b>2p</b>
	$1 \circ \frac{\sqrt{3}}{3} = 1$	<b>3p</b>
<b>b)</b>	$\frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 y^2} > 0$ pentru orice $x, y \in (0, 1]$	<b>2p</b>
	Arătăm că $\frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 y^2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-(x^2 - 1)(y^2 - 1)}{1 + x^2 y^2} \leq 0$ Cum $x \leq 1$ și $y \leq 1$ , $-(x - 1)(y - 1) \leq 0$ , inegalitatea este adevărată pentru orice $x, y \in (0, 1]$	<b>3p</b>
<b>c)</b>	$1 \circ x = 1$ , pentru orice $x \in \mathbb{R}$ .	<b>2p</b>
	$1 \circ \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \circ \frac{1}{\sqrt{3}} \circ \dots \circ \frac{1}{\sqrt{100}} \right) = 1$	<b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**
**(30 puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 2) - \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} - 2)^2} =$	<b>3p</b>
	$= \frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} - 2)^2} = \frac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)^2}$ , pentru orice $x \in (4, +\infty)$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)} = 1$ , $y = 1$ este ecuația asimptotei spre $+\infty$ la	<b>2p</b>
	graficul funcției $f$ . Cum $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = +\infty$ , dreapta de ecuație $x = 4$ este asimptota verticală la graficul funcției $f$ și $P(4, 1)$ este punctul de intersecție al celor două drepte.	<b>3p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) = 0$ nu are soluții, $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in (4, +\infty)$ , $f$ strict descrescătoare pentru $x \in (4, +\infty)$	<b>2p</b>
	Funcția $f$ este funcție continuă pentru $x \in (4, +\infty)$ , $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = +\infty$ , $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ , mulțimea valorilor funcției este mulțimea $(1, +\infty)$ , deci ecuația $f(x) = a$ are o singură soluție pentru orice $a \in (1, +\infty)$ .	<b>3p</b>

<b>2.a)</b>	Dacă $F$ este o primitivă a funcției $f$ , atunci $F''(x) = f'(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}, x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$ Cum $\frac{\cos 2x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} > 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ , funcția $F$ este convexă pe $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ .	<b>3p</b>  <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int (1 - f^2(x)) dx = \int (-\sin 2x) dx =$ $= \frac{\cos 2x}{2} + c, c \in \mathbb{R}$	<b>2p</b>  <b>3p</b>
<b>c)</b>	$\int f(x) dx = \int \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} dx = -\cos x + \sin x + c, c \in \mathbb{R}$ $F(x) = -\cos x + \sin x + c, F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + c = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ deci}$ $F(x) = -\sin x + \cos x - \frac{1}{2}$	<b>3p</b>  <b>2p</b>