Ministerul Educației
Centrul Național de Politici și Evaluare în Educație

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=3+i$. Arătați că $z(z-2i)=10$.

$z(z-2i)=(3+i)(3+i-2i)=(3+i)(3-i)=9-i^2=9-(-1)=9+1=10$

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x+1$. Arătați că $f(2x)-2f(x)=-1$, pentru orice număr real x.

$f(2x)=5\cdot 2x+1=10x+1$

$2\cdot f(x)=2(5x+1)=10x+2$

$f(2x)-2f(x)=(10x+1)-(10x+2)=\cancel{10x}+1-\cancel{10x}-2=-1$

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^3-2x+2}=x$.

$\sqrt[3]{x^3-2x+2}=x \Leftrightarrow x^3-2x+2=x^3 /-x^3 \Leftrightarrow -2x+2=0/-2$

$\Leftrightarrow -2x=-2/:(-2) \Leftrightarrow x=1$; $S=\{1\}$;

5p **4.** Se consideră mulțimea A, a numerelor naturale de două cifre. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea A, numărul $n+5$ să fie multiplu de 10.

$n=\overline{ab}$; $A=\{10,11,12,\dots,99\} \Rightarrow \text{card}\,A=90$

$n+5 \,\vdots\, 10 \Leftrightarrow (\overline{ab}+5) \,\vdots\, 10 \Leftrightarrow b=5.$

$\Rightarrow (n+5) \,\vdots\, 10 \Leftrightarrow n\in\{15,25,35,45,55,65,75,85,95\}$

$p=\dfrac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}}=\dfrac{9^{(9}}{90}=\dfrac{1}{10}$

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,0)$ și $B(5,4)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul O și este paralelă cu dreapta AB.

$d:\ y=mx+n$

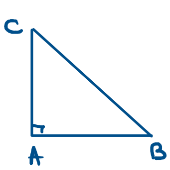
$O(0,0)\in d \Rightarrow 0=m\cdot 0+n \Rightarrow n=0 \Rightarrow d:\ y=m\cdot x$

$AB:\ \dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}=\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A} \Leftrightarrow \dfrac{y-0}{4-0}=\dfrac{x-4}{5-4} \Leftrightarrow \dfrac{y}{4}=\dfrac{x-4}{1} \Leftrightarrow y=4x-16$

$d \parallel AB \Leftrightarrow m=4$

$\Rightarrow d:\ y=4x$

5p **6.** Se consideră triunghiul isoscel ABC, dreptunghic în A, cu aria egală cu 4. Arătați că $BC=4$.



$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=4$

$\Leftrightarrow \dfrac{AB\cdot AC}{2}=4$; $AB=AC \Rightarrow \dfrac{AB^2}{2}=4 \Rightarrow AB^2=8 \Rightarrow AB=2\sqrt{2}$

ΔABC dreptunghic în A, isoscel $\Rightarrow BC=AB\sqrt{2}$

$\Rightarrow BC=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$

$\Rightarrow BC=4$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & a\\ a & a+1 & -2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+y+2z=2\\ x-y+az=4\\ ax+(a+1)y-2z=a\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=8$.

$$\det(A(0))=\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=2(-1)(-2)+1\cdot1\cdot2+0\cdot1\cdot0-2\cdot(-1)\cdot0-0\cdot1\cdot2-(-2)\cdot1\cdot1=4+2+0-0-0+2=8$$

5p **b)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

$A(a)$ inversabilă $\Leftrightarrow \det A\neq0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & a\\ a & a+1 & -2\end{vmatrix}\neq0 \Leftrightarrow 4+2(a+1)+a^2+2a-2a(a+1)+2\neq0$

$\Leftrightarrow 4+2a+2+a^2+\cancel{2a}-2a^2-\cancel{2a}+2\neq0$

$\Leftrightarrow -a^2+2a+8\neq0 \Leftrightarrow a^2-2a-8\neq0$

Pentru ecuația $a^2-2a-8=0$

avem: $\Delta=4+32=36$

$a_1=\frac{2-6}{2}=-2$; $a_2=\frac{2+6}{2}=4$

$\Rightarrow a^2-2a-8\neq0 \Leftrightarrow a=-2$ sau $a=4$

$\Rightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,4\}$

5p **c)** Pentru $a=-2$, arătați că $x_0z_0+y_0=-2$, pentru orice soluție (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații.

Pentru $a=-2$ sistemul devine:

$\begin{cases}2x+y+2z=2\\ x-y-2z=4\\ -2x-y-2z=-2\end{cases}$ $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -2\\ -2 & -1 & -2\end{pmatrix}$ $\det A=0$

$\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2-1=-3 \Rightarrow \operatorname{rang}A=2$

$\bar{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 4\\ -2 & -1 & -2\end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 4\\ -2 & -1 & -2\end{vmatrix}=+4-2-8-4+8+2=0$

$\Rightarrow \operatorname{rang}A=\operatorname{rang}\bar{A}=2$

Fie $z=\alpha \Rightarrow \begin{cases}2x+y=2-2\alpha\\ x-y=4+2\alpha\end{cases}$ $y=2-2\alpha-2\cdot2=-2-2\alpha$

$3x\ \ \ \ =6 \Rightarrow x=2$

Fie x_0,y_0,z_0 soluții ale sistemului $\Rightarrow x_0=2$

$y_0=-2-2z_0$

$\Rightarrow x_0z_0+y_0=\cancel{2z_0}-2-\cancel{2z_0}=-2$

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+(2^x-2)(2^y-2)$.

5p **a)** Arătați că $2\circ3=18$.

$2\circ3=2\cdot3+(2^2-2)(2^3-2)=6+(4-2)(8-2)=6+2\cdot6=6+12=18$

5p **b)** Arătați că $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

$e=1$ element neutru pentru „$\circ$” $\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}$

$x\circ1=1\circ x=x$

$x\cdot1+(2^x-2)(2^1-2)=1\cdot x+(2^1-2)(2^x-2)=x$

$\Leftrightarrow x+(2^x-2)\cdot0=x+0\cdot(2^x-2)=x$

$\Leftrightarrow x=x=x$ adevărat $\Rightarrow e=1$ element neutru pt. „$\circ$”

5p **c)** Demonstrați că $x\circ(-x)\le1$, pentru orice număr real x.

$x\circ(-x)\le1\ \ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x\cdot(-x)+(2^x-2)(2^{-x}-2)\le1$

5p c) Demonstrați că $x \circ (-x) \leq 1$, pentru orice număr real x.

$x \circ (-x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \cdot (-x) + (2^x - 2)(2^{-x} - 2) \leq 1$

$\Leftrightarrow -x^2 + (2^x - 2)\left(\frac{1}{2^x} - 2\right) \leq 1 \Leftrightarrow -x^2 + \left(1 - \frac{2}{2^x} - 2 \cdot 2^x + 4\right) \leq 1$

$\Leftrightarrow -x^2 + 5 - \frac{2}{2^x} - 2 \cdot 2^x \leq 1 \,/\,(-1) \Leftrightarrow x^2 - 5 + \frac{2}{2^x} + 2 \cdot 2^x \geq -1 \,/\, +1$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 + \frac{2}{2^x} + 2 \cdot 2^x \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2\left(2^x + \frac{2}{2^x} - 2\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \left(2^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2^{\frac{x}{2}}}\right)^2 \geq 0$, adevărat, deoarece $x^2 \geq 0$ și $2\left(2^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2^{\frac{x}{2}}}\right)^2 \geq 0$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3\ln\frac{x+3}{x-1}$.

5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{(x-1)(x+3)}$, $x \in (1, +\infty)$.

$f'(x) = \left(x + 3\ln\frac{x+3}{x-1}\right)' = x' + 3\left(\ln\frac{x+3}{x-1}\right)' = 1 + 3 \cdot \frac{1}{\frac{x+3}{x-1}} \cdot \left(\frac{x+3}{x-1}\right)'$

$= 1 + \frac{3(x-1)}{x+3} \cdot \frac{(x+3)'(x-1) - (x+3)(x-1)'}{(x-1)^2} = 1 + \frac{3\cancel{(x-1)}}{x+3} \cdot \frac{\cancel{x} - 1 - \cancel{x} - 3}{(x-1)^{\cancel{2}}}$

$\overset{(x-1)(x+3)}{=} \frac{1}{1} + \frac{3 \cdot (-4)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x^2 - x + 3x - 3 - 12}{(x-1)(x+3)} = \frac{x^2 + 2x - 15}{(x-1)(x+3)}$

5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x + 3\ln\frac{x+3}{x-1}}{x} = \lim_{x \to \infty} 1 + \frac{3\ln\frac{x+3}{x-1}}{x}$

$= 1 + 3\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x+3)}{x} - 3\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x-1)}{x} \overset{\text{L'Hospital}}{=} 1 + 3\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x+3}}{1} - 3\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x-1}}{1}$

$= 1 + 3\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x+3} - 3\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x-1} = 1 + 3 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 1$

$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} x + 3\ln\frac{x+3}{x-1} - mx = \lim_{x \to \infty} 3\ln\frac{x+3}{x-1} = 3 \cdot \ln 1$

$= 0$

Asimptota oblică spre $+\infty$ este: $y = mx + n \Rightarrow y = x$

5p c) Arătați că $\ln\frac{x+3}{3(x-1)} \geq 1 - \frac{x}{3}$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 15}{(x-1)(x+3)} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 3x - 15 = 0$

$\Leftrightarrow x(x+5) - 3(x+5) = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x+5) = 0$

$\Leftarrow x = 3 \ (x \in (1; +\infty))$

x	1		3		$+\infty$
$x^2+2x-15$		$- - - - -$	0	$+ + + + + + + +$	
$(x-1)(x+3)$	0	$+ + + + + +$	$+ + +$	$+ + + + +$	
$f'(x)$	/	$- - - - -$	0	$+ + + + + + + +$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	

$f(3) = 3 + 3\ln\frac{6}{2} = 3 + 3\ln 3$

$\Rightarrow f(x) \geq f(3), \ \forall x \in (1; +\infty)$

$x+3\ln\frac{x+3}{x-1}\geq 3+3\ln 3,\ \forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3\ln\frac{x+3}{x-1}-3\ln 3\geq 3-x,\ \forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3\left(\ln\frac{x+3}{x-1}\cdot\frac{1}{3}\right)\geq 3-x\ /:3,\ \forall x\in(1,+\infty)$

$\Leftrightarrow \ln\frac{x+3}{3(x-1)}\geq\frac{3-x}{3},\ \forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow \ln\frac{x+3}{3(x-1)}\geq 1-\frac{x}{3},\ \forall x\in(1;+\infty)$

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(x^2+2x\right)e^{-x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 f(x)e^x dx=18$.

$$\int_0^3 f(x)e^x dx=\int_0^3 (x^2+2x)\cdot e^{-x}\cdot e^x dx=\int_0^3 (x^2+2x)\cdot\frac{1}{\cancel{e^x}}\cdot\cancel{e^x}dx=\int_0^3 (x^2+2x)dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+\cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}}\right)\Big|_0^3=\left(\frac{3^3}{3}+3^2\right)-\left(\frac{0^3}{3}+0\right)=\frac{27}{3}+9-0=9+9=18$$

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+2}dx=\frac{e-2}{e}$.

$$\int_0^1\frac{f(x)}{x+2}dx=\int_0^1\frac{(x^2+2x)\cdot e^{-x}}{x+2}dx=\int_0^1\frac{x\cancel{(x+2)}\cdot e^{-x}}{\cancel{x+2}}dx=\left(-e^{-x}\cdot x\right)\Big|_0^1-\int_0^1(-e^{-x})dx$$

$$=\left(-e^{-1}\cdot 1+e^{-0}\cdot 0\right)+\int_0^1 e^{-x}dx=-\frac{1}{e}-e^{-x}\Big|_0^1=-\frac{1}{e}-\left(e^{-1}-e^{-0}\right)=-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1$$

$$=-\frac{2}{e}+1=\frac{-2+e}{e}=\frac{e-2}{e}$$

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt\right)=1$.

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x(t^2+2t)\cdot e^{-t}dt=\int_0^x t^2e^{-t}+2\int_0^x t\cdot e^{-t}dt=\left[t^2\cdot(-e^{-t})\right]\Big|_0^x-\int_0^x 2t\cdot(-e^{-t})dt+\int_0^x 2t\cdot e^{-t}dt$$

$$=\left(-t^2\cdot e^{-t}\right)\Big|_0^x+4\int_0^x t\cdot e^{-t}dt=\left(-x^2\cdot e^{-x}\right)-\left(-0^2\cdot e^{-0}\right)+4\left[t\cdot(-e^{-t})\right]\Big|_0^x-4\int_0^x(-e^{-t})dt$$

$$=-x^2\cdot e^{-x}+4\left[x\cdot(-e^{-x})-0\cdot(-e^{-0})\right]+4\int_0^x e^{-t}dt=-x^2\cdot e^{-x}-4x\cdot e^{-x}-4\cdot e^{-t}\Big|_0^x$$

$$=-x^2\cdot e^{-x}-4x\cdot e^{-x}-4\left(e^{-x}-e^0\right)=-x^2\cdot e^{-x}-4x\cdot e^{-x}-4\cdot e^{-x}+4=-e^{x}(x^2+4x+4)+4=$$

$$=-\frac{(x+2)^2}{e^x}+4$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{(x+2)^2}{e^x}+4}{x^2}\overset{l'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left[-\frac{(x+2)^2}{e^x}+4\right]'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2(x+2)\cdot e^x-(x+2)^2e^x}{e^{2x}}}{2x}$$

$$\left(\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}-\frac{(x+2)^2}{e^x}+4=-\frac{(0+2)^2}{e^0}+4=-4+4=0\\&\lim_{x\to 0}x^2=0\end{aligned}\right).$$

$$\left(\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2x\cdot e^x - \cancel{4e^x} + x^2\cdot e^x + 4x e^x + \cancel{4e^x}}{2x\cdot e^{2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot e^x + 2x e^x}{2x e^{2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}\cdot\cancel{e^x}(x+2)}{2\cdot\cancel{x}(e^x)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+2}{2} = \frac{0+2}{2} = 1$$