Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $8-6\sqrt{6}+6\left(\sqrt{6}-1\right)=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $(f\circ f)(0)=4$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3\cdot 2^{2x}+4^{x}=4$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor divizor al numărului 6.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y=3x-2$ și punctul $A(a,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctul A aparține dreptei d.

5p **6.** Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu $AB=10$ și $\cos A=0$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 50.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & -x & x^2\\ 0 & 1 & -2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=1$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $A(n)\cdot A(n+1)\cdot A(n+2)\cdot A(n+3)=A\left(2n^2\right)$.

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{2x}{y+2}+\dfrac{2y}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că $1*0=1$.

5p **b)** Arătați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați $x\in M$, x nenul, pentru care $x*\dfrac{4}{x}=x$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2+\dfrac{x}{e^x-x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{e^x(1-x)}{\left(e^x-x\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $m\in(1,2]$, ecuația $f(x)=m$ are soluție unică.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-x+\sqrt{x^2+9}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^5\left(f(x)-\sqrt{x^2+9}\right)dx=0$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^4\frac{x}{f(x)+x-3}dx=2$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{f(x)}dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.