



**Examenul național de bacalaureat 2023**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Varianta 7**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că  $3 - 4i + i(4 - i) = 4$ , unde  $i^2 = -1$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4 - 2x$ . Arătați că  $(f \circ f)(1) = 0$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_5(x^2 - 2x + 6) = \log_5 6$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 3 și cu 7.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(1, 2)$ ,  $B(a, 0)$  și  $C(0, b)$ . Determinați numerele reale  $a$  și  $b$ , știind că punctul  $A$  este mijlocul segmentului  $BC$ .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul  $ABC$ , cu  $AB = AC = 10$  și  $BC = 16$ . Arătați că  $AD = 6$ , unde  $AD$  este înălțime în triunghiul  $ABC$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

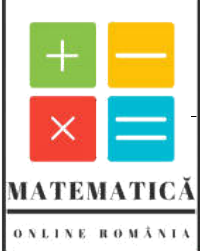
**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$  și  $B(x) = \begin{pmatrix} x+1 & 2x+1 \\ x-1 & 2x-1 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(B(2)) = 4$ .
- 5p** b) Determinați numărul real  $a$  pentru care  $B(0) \cdot B(1) = aA$ .
- 5p** c) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $A \cdot B(x) = A \cdot (B(0) - 3I_2)$ .
2. Se consideră polinomul  $f = X^3 + 2X^2 + mX - 3$ , unde  $m$  este număr real.
- 5p** a) Pentru  $m = 0$ , arătați că  $f(1) = 0$ .
- 5p** b) Determinați numărul real  $m$  pentru care polinomul  $f$  este divizibil cu polinomul  $X + 1$ .
- 5p** c) Determinați numărul real  $m$  pentru care  $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = x_1 x_2 x_3$ , unde  $x_1, x_2$  și  $x_3$  sunt rădăcinile polinomului  $f$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + x - 2}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{3x(x-4)}{(x^2 + x - 2)^2}$ ,  $x \in (1, +\infty)$ .
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $f(x) + f(x^2) \geq \frac{17}{3}$ , pentru orice  $x \in (1, 2]$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x(x-1)^2$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_3^7 \frac{f(x)}{(x-1)^2} dx = 20$ .
- 5p** b) Arătați că  $\int_2^3 \frac{x}{f(x)} dx = \frac{1}{2}$ .



5p

c) Arătați că  $\int_0^1 \frac{xf(e^x)}{e^x} dx = \frac{e^2 - 5}{4}$ .