[redacted]

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $10+10:10$ este egal cu: **a)** 2 **b)** 9 **c)** 10 **d)** 11 $10+10:10=10+1=11$
5p	**2.** Dacă $b\neq 0$ și $\frac{a}{2}=\frac{10}{b}$, atunci $a\cdot b$ este egal cu: **a)** 2 **b)** 5 **c)** 10 **d)** 20 $\frac{a}{2}=\frac{10}{b} \Leftrightarrow a\cdot b=2\cdot 10 \Leftrightarrow a\cdot b=20$
5p	**3.** Opusul numărului 5 este: **a)** -5 **b)** $-\frac{1}{5}$ **c)** $\frac{1}{5}$ **d)** 5 Opusul lui 5 este: -5
5p	**4.** Transformând numărul $1,3$ în fracție ordinară se obține: **a)** $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{13}{10}$ **c)** $\frac{4}{3}$ **d)** $\frac{13}{9}$ $1,3=\frac{13}{10}$

5p 5. Patru elevi, Ana, George, Radu și Elena, au calculat produsul numerelor $x = 2\sqrt{2}$ și $y = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, iar rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Ana	George	Radu	Elena
$4\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	8

Conform informațiilor din tabel, rezultatul corect a fost obținut de:

a) Ana
b) George
c) Radu
d) Elena

$x \cdot y = \cancel{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{2\sqrt{2}}} = 1.$

5p 6. Andrei are 28 de ani, iar Cătălina are 13 ani. Andrei afirmă: „Peste doi ani voi avea dublul vârstei pe care o va avea Cătălina.”. Afirmația lui Andrei este:

a) adevărată
b) falsă

Peste doi ani $\Big\langle$ Andrei va avea: $28+2=30$; Cătălina va avea: $13+2=15$

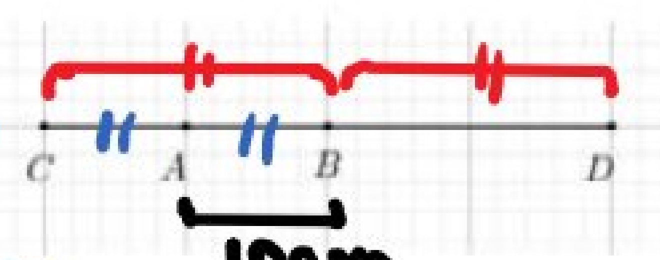
$30 = 2 \cdot 15 \Leftrightarrow 30 = 30$, adevărat

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p 1. În figura alăturată este reprezentat segmentul AB cu lungimea de $10\,cm$. Punctul A este mijlocul segmentului CB, iar punctul B este mijlocul segmentului CD. Lungimea segmentului CD este egală cu:

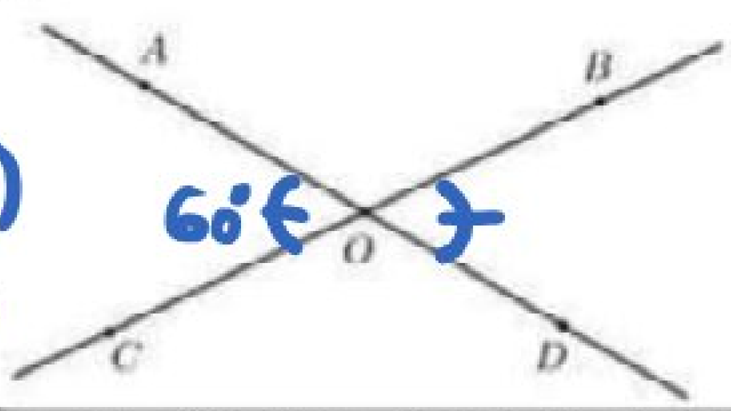
a) 10 cm
b) 20 cm
c) 30 cm
d) 40 cm



$AB = AC = 10\,cm$
$CB = AB + AC = 20\,cm$
$CB = BD = 20\,cm$
$CD = CB + BD = 40\,cm$

5p 2. În figura alăturată sunt reprezentate unghiurile opuse la vârf AOC și BOD. Măsura unghiului AOC este egală cu $60°$. Măsura unghiului BOD este egală cu:

a) 30°
b) 60°
c) 90°
d) 120°



$\sphericalangle BOD \equiv \sphericalangle AOC$ (opuse la vârf)

$\Rightarrow m \sphericalangle BOD = 60°$

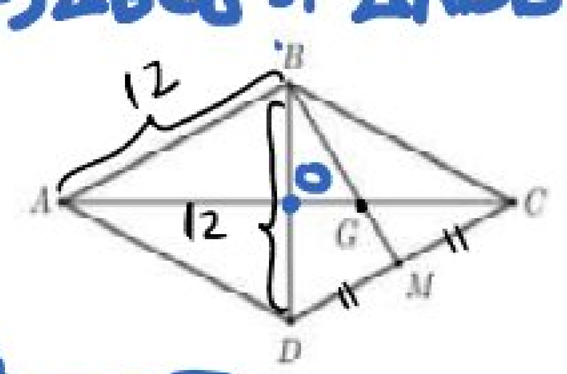
5p 3. În figura alăturată este reprezentat rombul $ABCD$ cu $AB = BD = 12\,cm$. Punctul M este mijlocul segmentului CD și dreapta BM intersectează dreapta AC în punctul G. Lungimea segmentului AG este egală cu:

a) $12\sqrt{3}$ cm
b) $10\sqrt{3}$ cm
c) $9\sqrt{3}$ cm
d) $8\sqrt{3}$ cm

$\left.\begin{array}{l} AB = BD \\ AB = BC = CD = DA \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle BCD$ și $\triangle ABD$ echilaterale

Fie $AC \cap BD = \{O\}$

$AC \perp BD$



$\Rightarrow AO = h_{\triangle echi} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\,cm.$

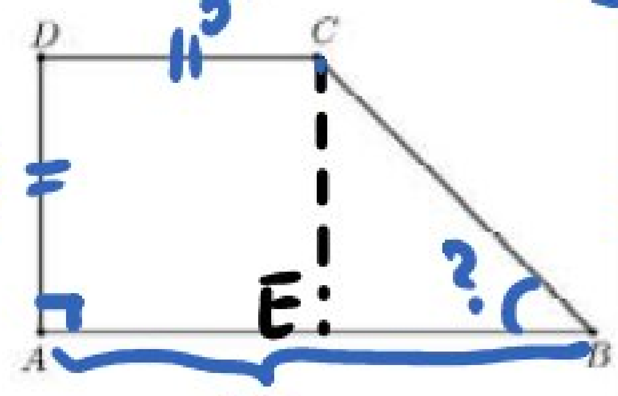
$CO = h_{\triangle echi} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\,cm.$

$\left.\begin{array}{l} CO \text{ mediană} \\ BM \text{ mediană} \\ CO \cap BM = \{G\} \end{array}\right\} \Rightarrow G =$ centru de greutate $\Rightarrow OG = \frac{1}{3} \cdot CO = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}\,cm$

$AG = AO + OG = 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}\,cm$

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat trapezul $ABCD$ cu bazele AB și CD, în care măsura unghiului BAD este egală cu $90°$, $AD = DC = 5\text{ cm}$ și $AB = 10\text{ cm}$. Măsura unghiului ABC este egală cu:

a) $30°$
b) $45°$
c) $60°$
d) $90°$

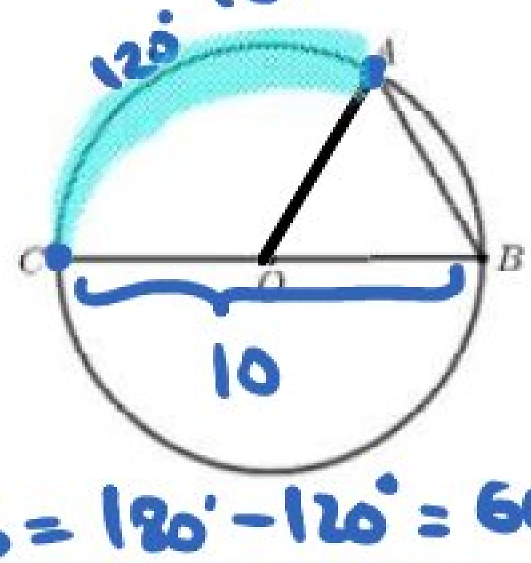


Fie $CE \perp AB, E \in (AB)$
$\Rightarrow CE \parallel AD$
$CD \parallel AE$
$AD = DC = 5$
$m\sphericalangle A = 90°$
$\Rightarrow AECD$ pătrat

$\Rightarrow AE = EC = CD = DA = 5\text{cm}$
$BE = AB - AE = 10 - 5 = 5\text{cm}$
$\Rightarrow BE = EC$, $\sphericalangle E = 90°$
$\Rightarrow \triangle BEC$ dreptunghic isoscel
$\Rightarrow \sphericalangle CBE = 45°$

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat cercul de centru O și diametru $BC = 10\text{ cm}$. Punctul A aparține cercului astfel încât măsura arcului mic AC este de $120°$. Lungimea segmentului AB este egală cu:

a) 5 cm
b) $5\sqrt{2}\text{ cm}$
c) $5\sqrt{3}\text{ cm}$
d) 10 cm

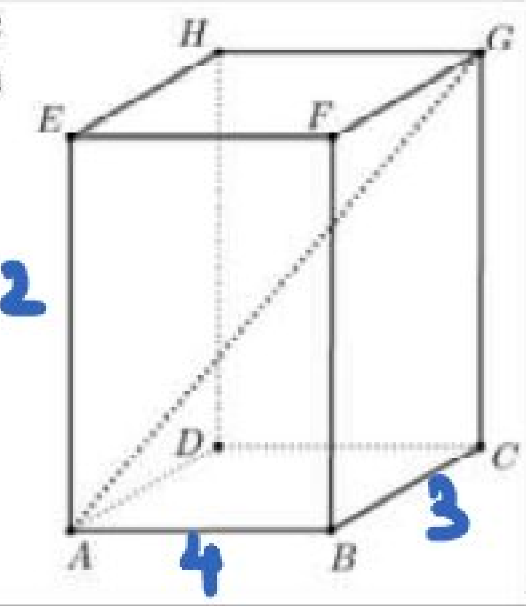


$m\widehat{AC} = 120° = m\,\widehat{AOC}$
BC = diametru
$\Rightarrow m\,\widehat{BOC} = 180°$
$\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC - \sphericalangle AOC = 180° - 120° = 60°$

$OA = OB$ (raze), $\sphericalangle AOB = 60°$ $\Rightarrow \triangle AOB$ echilateral
$\Rightarrow AB = OA = OB = R$
BC = diametru $= 2R$
$10 = 2R \Rightarrow R = 5 \Rightarrow AB = 5\text{cm}$

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$ cu $AB = 4\text{cm}$, $BC = 3\text{cm}$ și $AE = 12\text{cm}$. Lungimea diagonalei AG a paralelipipedului este egală cu:

a) 5cm
b) 13cm
c) 14cm
d) 19cm



$d = \sqrt{L^2 + \ell^2 + h^2}$
$= \sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}$
$= \sqrt{169} = 13\text{ cm}$

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Ana, Maria și Vlad au în total 396 de timbre. Ana are cu 25 de timbre mai multe decât Maria și cu 16 timbre mai puține decât Vlad.

(2p) a) Poate avea Ana 132 de timbre? Justifică răspunsul dat.

Fie A = nr. de timbre ale Anei;
M = nr. de timbre ale Mariei;
V = nr. de timbre ale lui Vlad;
Presupun că Ana are 132 de timbre;
$A = 25 + M \Rightarrow 132 = 25 + M \Rightarrow M = 132 - 25 = 107$
$A = V - 16 \Rightarrow 132 = V - 16 \Rightarrow V = 132 + 16 \Rightarrow V = 148$
$A + M + V = 396 \Leftrightarrow 132 + 107 + 148 = 396$
$\Leftrightarrow 387 = 396$ fals $\Rightarrow$ Ana nu poate avea 132 timbre.

(3p) b) Determină numărul de timbre pe care le are Vlad.

$A = 25 + M \Rightarrow M = A - 25$

$A = V - 16 \Rightarrow V = A + 16$

$A + M + V = 396 \Leftrightarrow A + A - 25 + A + 16 = 396$

$\Leftrightarrow 3A - 9 = 396 \Leftrightarrow 3A = 396 + 9 = 405$

$\Leftrightarrow A = 405 : 3 \Leftrightarrow A = 135$

$V = A + 16 = 135 + 16$

$\Leftrightarrow V = 151$

5p **2.** Se consideră expresia $E(x) = (x+1)^2 + 2(x-1)^2 - 3(x^2-1)$, unde x este număr real.

(2p) a) Arată că $E(x) = 6 - 2x$, pentru orice număr real x.

$E(x) = x^2 + 2x + 1 + 2(x^2 - 2x + 1) - 3x^2 + 3$

$= x^2 + 2x + 1 + 2x^2 - 4x + 2 - 3x^2 + 3$

$= -2x + 6 = 6 - 2x$

(3p) b) Determină mulțimea numerelor reale x, pentru care $E(x) < x$.

$E(x) < x \Leftrightarrow 6 - 2x < x$

$\Leftrightarrow -2x - x < -6$

$\Leftrightarrow -3x < -6 \ / :(-3)$

$\Leftrightarrow x > 2$

$\Rightarrow S = (2; +\infty)$

5p 3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$.

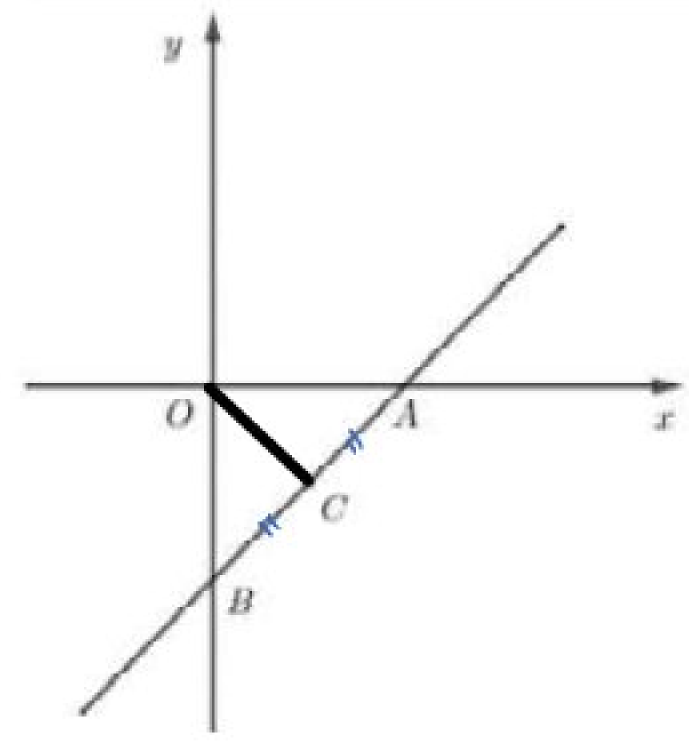
(2p) a) Arată că $f(0)+f(1)=-1$.

$f(0) = 0-1 = -1$

$f(1) = 1-1 = 0$

$f(0)+f(1) = -1+0$

$= -1$



(3p) b) Știind că A și B sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox, respectiv Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy, iar punctul C este mijlocul segmentului AB, calculează aria triunghiului OBC.

$G_f \cap Ox: \ f(x)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow A(0,1)$

$G_f \cap Oy: \ f(0) = 0-1 = -1 \Rightarrow B(0;-1)$

$OA = |x_A - x_O| = 1$; $OB = |y_B - y_O| = 1$;

$OA \perp OB \Rightarrow \Delta AOB$ dreptunghic

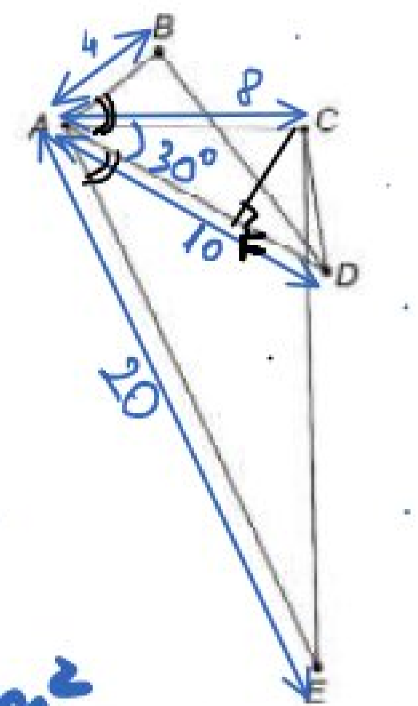
$\Rightarrow A_{\Delta AOB} = \dfrac{AO\cdot OB}{2} = \dfrac{1\cdot 1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$M =$ mij. $AB \Rightarrow OM =$ mediană în ΔAOB

$\Rightarrow A_{\Delta OBC} = \dfrac{A_{\Delta AOB}}{2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4}$

5p 4. În figura alăturată sunt reprezentate punctele A, B, C, D și E astfel încât $AB = 4\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$, $AD = 10\text{cm}$ și $AE = 20\text{cm}$. Măsura unghiului BAC este egală cu măsura unghiului DAE și $\sphericalangle CAD = 30°$.

(2p) a) Arată că aria triunghiului CAD este egală cu 20 cm^2.



Fie $CF \perp AD$, $F \in AD$

$\Rightarrow \Delta CFA$ dreptunghic în F
$\sphericalangle CAF = 30°$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (T\sphericalangle 30°)$ $CF = \frac{AC}{2} = \frac{8}{2} = 4\text{cm}$

$A_{\Delta CAD} = \frac{AD \cdot CF}{2} = \frac{10 \cdot 4}{2} = 20\text{ cm}^2$

(3p) b) Demonstrează că $CE = 2 \cdot BD$.

Fie $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle DAE = x°$.

În ΔBAD: $\sphericalangle BAD = 30° + x°$
În ΔCAE: $\sphericalangle CAE = 30° + x°$ $\Big\} \Rightarrow \sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAE$ (1)

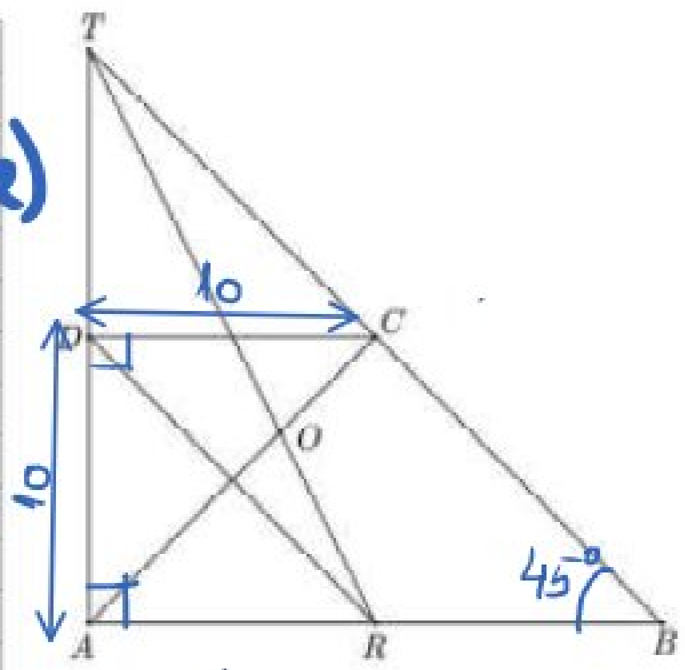
$\frac{BA}{CA} = \frac{4^{(4}}{8} = \frac{1}{2}$
$\frac{AD}{AE} = \frac{10^{(10}}{20} = \frac{1}{2}$ $\Big\} \Rightarrow \frac{BA}{CA} = \frac{AD}{AE}$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ (LUL) $\Delta BAD \sim \Delta CAE$

$\Rightarrow \frac{BD}{CE} = \frac{BA}{CA} = \frac{AD}{AE} = \frac{1}{2} \Rightarrow BD \cdot 2 = CE$

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ și $AD = CD = 10\text{ cm}$. Paralela prin D la dreapta BC intersectează dreapta AB în punctul R. Dreptele AD și BC se intersectează în punctul T și O este punctul de intersecție a dreptelor TR și AC.

(2p) a) Arată că punctul R este mijlocul segmentului AB.



$\left.\begin{array}{l} DR \parallel BC \\ AB \text{ secantă} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{ARD} \equiv \hat{ABC}$ (corespondente)

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sphericalangle ARD = 45^\circ \\ AD \perp AR \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ADR$ isoscel

$\Rightarrow AR = AD = 10\text{ cm}.$

$\left.\begin{array}{l} DR \parallel BC \\ DC \parallel RB \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta DCBR$ paralelogram

$\Rightarrow DC = RB = 10\text{ cm}$ Dar $AR = 10\text{ cm} \Rightarrow AR = RB$

$\Rightarrow R =$ mijlocul lui AB

(3p) b) Calculează lungimea segmentului TO.

$AB = AR + RB = 20\text{ cm}.$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} DC = \frac{AB}{2} \\ DC \parallel AB \end{array}\right\} \Rightarrow DC =$ linie mijlocie în ΔTAB

$\Rightarrow D =$ mijlocul lui TA

și $C =$ mijlocul lui $TB \Rightarrow AC$ - mediană în ΔTAB

dar și $R =$ mijlocul lui $AB \Rightarrow TR$ - mediană în ΔTAB

$AC \cap TR = \{O\} \Rightarrow O =$ centru de greutate în ΔTAB

$\Rightarrow TO = \frac{2}{3} \cdot TR$

$D =$ mij lui $TA \Rightarrow TD = DA = 10\text{ cm} \Rightarrow TA = TD + DA = 20\text{ cm}.$

ΔTAR dreptunghic în $A \Rightarrow$

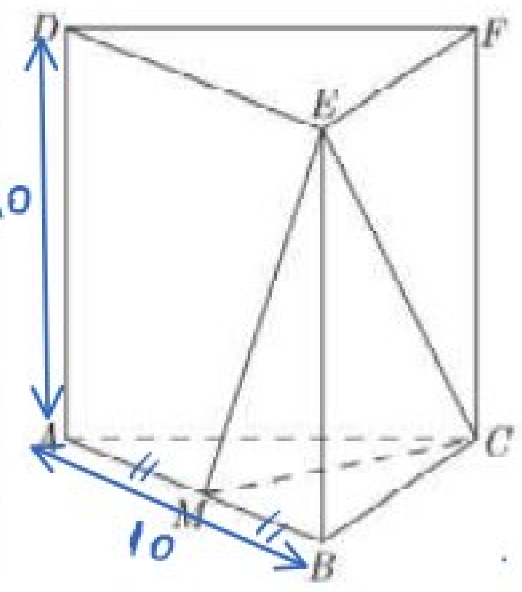
(TP) $TR^2 = TA^2 + AR^2 \Rightarrow TR^2 = 20^2 + 10^2 = 400 + 100 = 500$

$\Rightarrow TR = 10\sqrt{5}\text{ cm}.$

$\Rightarrow TO = \frac{2}{3} \cdot 10\sqrt{5} = \frac{20\sqrt{5}}{3}\text{ cm}.$

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată prisma dreaptă $ABCDEF$ cu baza triunghiul echilateral ABC și $AB = AD = 10\,\text{cm}$. Punctul M este mijlocul segmentului AB.

(2p) a) Arată că volumul prismei $ABCDEF$ este egal cu $250\sqrt{3}\ \text{cm}^3$.



$$V_{ABCDEF} = A_b \cdot h$$

$$= \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} \cdot AD$$

water

$$\frac{\quad}{4} \cdot 10 = \frac{100\sqrt{3}}{4} \cdot 10 =$$

$$= 25\sqrt{3} \cdot 10 = 250\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

(3p) b) Demonstrează că distanța de la punctul B la planul (EMC) este egală cu $2\sqrt{5}\ \text{cm}$.

M = mijl lui $AB \Rightarrow CM$ = mediană în $\Delta ABC \Rightarrow A_{\Delta MBC} = \frac{A_{\Delta ABC}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2$

$EB \perp (ABC) \Rightarrow EB \perp (MBC) \Rightarrow EB$ = înălțime în piramida $EMBC$.

$$V_{EMBC} = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{A_{\Delta MBC} \cdot EB}{3} = \frac{\frac{25\sqrt{3}}{\cancel{2}_1} \cdot \cancel{10}^5}{3} = \frac{125\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^3$$

Notăm $h' = d(B;(EMC))$

$$V_{EMBC} = V_{BEMC} = \frac{A_{\Delta EMC} \cdot h'}{3} \Rightarrow \frac{125\sqrt{3}}{3} = \frac{A_{\Delta EMC} \cdot h'}{3}$$

$$\Rightarrow 125\sqrt{3} = A_{\Delta EMC} \cdot h' \Rightarrow h' = \frac{125\sqrt{3}}{A_{\Delta EMC}}$$

ΔEBM dr. în $B \Rightarrow$(TP) $EM^2 = MB^2 + EB^2 \Rightarrow EM^2 = 25 + 100 = 125$

$\Rightarrow EM = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}\ \text{cm}$

$EB = BC \Rightarrow EBFE$ pătrat $\Rightarrow EC = EB\sqrt{2} = 10\sqrt{2}\ \text{cm}.$

$$MC = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\ \text{cm}.$$

$EH^2+HC^2=(5\sqrt{5})^2+(5\sqrt{3})^2=125+75=200$
$EC^2=(10\sqrt{2})^2=200$ $\Big\}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (RTP) $\triangle EHC$ dreptunghic în H

$\Rightarrow A_{\triangle EHC}=\frac{EH\cdot HC}{2}=\frac{5\sqrt{5}\cdot 5\sqrt{3}}{2}=\frac{25\sqrt{15}}{2}$

$\Rightarrow h'=\frac{125\sqrt{3}}{\frac{25\sqrt{15}}{2}}=\frac{125\sqrt{3}\cdot 2}{25\sqrt{15}}=\frac{250\sqrt{3}}{25\sqrt{15}}=\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$

$=\frac{10\sqrt{45}}{15}=\frac{30\sqrt{5}}{15}=2\sqrt{5}$ cm.

$\Rightarrow d(B;(EHC))=2\sqrt{5}$ cm.